PROBLÈME 2

Dans ce problème, on étudie l'intégrale $u_n = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t$ où $n \in \mathbb{N}$.

Partie I - Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q13. Calculer u_0, u_1, u_2.

Q14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q15. Établir que $(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}$, pour $n \geqslant 1$.

Q16. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = (n+1)u_{n+1}u_n$, pour $n \in \mathbb{N}$.
Vérifier que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et donner sa valeur.

Q17. En déduire que $(n+1)u_{n+1}^2 \leqslant 2\pi \leqslant (n+1)u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q18. Donner, à partir de la question précédente, un encadrement de u_n en fonction de n pour $n \geqslant 1$.

Q19. En déduire que $u_n \underset{\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}$.

Partie II - Série entière

Dans cette partie, on étudie la série entière de rayon de convergence R définie par :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n, \text{ pour tout } x \in]-R;R[.$$

Q20. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge-t-elle ?

Q21. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

Q22. Établir la formule suivante pour tout nombre entier naturel n et tout nombre réel $x \in]-1;1[$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)} - x^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^n(t)\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)}.$$

Q23. En déduire l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)}$ pour tout $|x| < 1$.

Q24. Montrer que $S(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2}{(1-x) + (1+x)u^2}\mathrm{d}u$ pour $|x| < 1$ à l'aide du changement de variable $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

Q25. En déduire l'expression de $S(x)$ pour $|x| < 1$.